E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M - I.C.P.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

SÉRIE T

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1985

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Lundi 13 Mai 1985 de 9 h à 12 h

A rédiger sur copies de couleur JAUNE

I. Soit $X \in]1, +\infty[$; on envisage de calculer $\text{Log } X = \int_1^X \frac{dx}{x}$ à l'aide de la méthode des trapèzes appliquée à des subdivisions particulières :

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = X .$$

1°) a. Evaluer en fonction du rapport $t_i = x_i / x_{i-1}$, l'aire du $i^{ème}$ trapèze (trapèze de sommets $A_{i-1}(x_{i-1}, 0)$ $A_i(x_i, 0)$ $M_i(x_i, \frac{1}{x_i})$ $M_{i-1}(x_{i-1}, \frac{1}{x_{i-1}})$).

b. En déduire comment choisir la suite $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ pour que les aires de ces trapèzes soient égales. Montrer que la valeur approchée obtenue est :

$$\lambda_n(X) = \frac{n}{2}\left(X^{\frac{1}{n}} - X^{-\frac{1}{n}}\right).$$

2°) Montrer que $\lambda_n(X)$ tend vers Log X par valeurs supérieures, lorsque n tend vers $+\infty$.

3°) a. Etudier les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = \frac{\text{sh}t - t}{t}$.

b. Montrer : $\forall t \geqslant 0 \qquad \varphi(t) \leqslant \text{ch}\, t - 1$.

4°) Montrer que :

$$\forall X \in]1, +\infty[\qquad \lambda_n(X) - \text{Log } X = (\text{Log } X).\ \varphi\left(\frac{\text{Log } X}{n}\right)$$

et déterminer un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall X \in]1, e] \qquad \lambda_n(X) - \text{Log } X \leqslant 10^{-2} .$$

II. On définit des suites numériques (C_n) (ℓ_n) par les conditions $(\mathcal{C})$:

$$(\mathcal{C}) \qquad C_0 \in [-1, +\infty[\qquad \ell_1 \in \mathbb{R} \qquad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + C_n}{2}}, \qquad \ell_{n+1} = \frac{\ell_n}{C_{n+1}}.$$

1°) Montrer que l'on définit effectivement deux suites $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2°) Montrer que la suite particulière : $\ell_n = \lambda_{2^n}(X)$ (extraite de la suite du I.1.b) est une suite vérifiant $(\mathcal{C})$.

(On cherchera (C_n) associée et on montrera les conditions $(\mathcal{C})$).

3°) Etudier les variations de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, et le signe de $f(x) - x$.

4°) En déduire que les suites (C_n) sont monotones et convergent vers 1 et que les suites (ℓ_n) sont monotones de signe constant.

5°) Montrer l'inégalité : $\forall n \geq 1 \qquad |C_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3} |C_n - 1|$.

6°) Montrer de même : $\forall t > 0 \qquad \text{Log } (1+t) < t$.

7°) On suppose $C_o \geq 1 \qquad \ell_1 \neq 0$.

a. Etablir les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$\left| \text{Log } |\ell_n| - \text{Log } |\ell_{n+p}| \right| \leq [C_{n+1} - 1] + [C_{n+2} - 1] + \ldots + [C_{n+p} - 1] \leq \frac{[C_n - 1]}{2} .$$

b. En déduire la convergence de la suite (ℓ_n) vers une limite ℓ et montrer :

$$C_n - 1 < \varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{\ell_n - \ell}{\ell_n} \right| < e^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1 .$$

8°) On suppose $C_o < 1$, $\ell_1 \neq 0$. Montrer de même la convergence de (ℓ_n). (On pourra établir $\left(\frac{1}{C_{n+1}} - 1\right) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{C_n} - 1\right)$), et montrer que : $\frac{1}{C_n} - 1 < \varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{\ell_n - \ell}{\ell_n} \right| < e^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1$.

9°) Application numérique : Evaluer l'ordre de grandeur de la précision relative, $\left| \frac{\ell_n - \ell}{\ell} \right|$, de la valeur approchée ℓ_n de ℓ lorsque n est tel que $|C_n - 1| < 10^{-8}$.

III. 1°) Calculer en fonction de α et n, les suites (C_n) et (ℓ_n) dans les cas suivants, et déterminer leurs limites

a. $C_o = \cos \alpha$, $\ell_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, $\qquad \alpha \in [-\pi \ \pi]$;

b. $C_o = \text{Ch } \alpha$, $\ell_1 = 2 \text{ sh } \frac{\alpha}{2}$, $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$.

2°) Soit le "programme de calcul" suivant :

INSTRUCTION 1 : X = ... (Nombre > 0, donné)

INSTRUCTION 2 : $C = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)$

INSTRUCTION 3 : $C = \sqrt{\frac{1+C}{2}}$, $L = \sqrt{X} - \frac{1}{\sqrt{X}}$

INSTRUCTION 4 : $C = \sqrt{\frac{1+C}{2}}$, $L = \frac{L}{C}$

INSTRUCTION 5 : Si $|C - 1| > 10^{-8}$ retourner à l'instruction 4 sinon faire l'instruction 6

INSTRUCTION 6 : Afficher L .

Une insertion du type X = f(X, Y, Z, ...) signifie qu'après l'instruction la nouvelle valeur attribuée à X sera le résultat du calcul f(X, Y, Z, ...).

Question :

Quelle est la fonction f(X) qu'approche la valeur L affichée ? avec quelle précision relative ? (On utilisera bien sûr la question précédente).

3°) Quelle est la fonction g(X) obtenue si l'on modifie les instructions 2 et 3 de la façon suivante :

INSTRUCTION 2 : C = X

INSTRUCTION 3 : $C = \sqrt{\frac{1+C}{2}}$, $L = 2\sqrt{\frac{1-X}{2}}$

les autres étant inchangées et le nombre X donné appartenant à [- 1 + 1].

Donner un majorant M du nombre de fois qu'est faite l'instruction 4.